Nom : Ahmed Saleck old teyib
Classe : 7C Matricule : 1369

Chapitre II : Nombres Complexes

Exercice (10) :

Soit $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $\alpha = z + z^2 + z^4$.

1°) Calculer $\alpha + \bar{\alpha}$ et $\alpha\bar{\alpha}$.

2°) En deduire que:

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2};$$

et que $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Une Solution :

$z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

$\alpha = z + z^2 + z^4$

$\bar{\alpha} = \bar{z} + \bar{z}^2 + \bar{z}^4$

* **Remarque** : Si $z = e^{i\theta}$, alors $|z| = 1$; $\bar{z} = \frac{1}{z}$

on a: $z = e^{i\frac{2\pi}{7}} \Rightarrow z^7 = 1$

d'où : $\bar{z} = \frac{1}{z} = \frac{z^7}{z} = z^6$

$\bar{z}^2 = \frac{1}{z^2} = \frac{z^7}{z^2} = z^5$

$\bar{z}^4 = \frac{1}{z^4} = \frac{z^7}{z^4} = z^3$

Donc $\bar{\alpha} = \bar{z} + \bar{z}^2 + \bar{z}^4 \Rightarrow \bar{\alpha} = z^6 + z^5 + z^3$

1°) - $\alpha + \bar{\alpha} = ?$

* $\alpha + \bar{\alpha} = z + z^2 + z^4 + z^6 + z^5 + z^3$

$1 + \alpha + \bar{\alpha} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$

$= \frac{1 - z^7}{1 - z} = 0$ car $z^7 = 1$

$1 + \alpha + \bar{\alpha} = 0$

$\Rightarrow \alpha + \bar{\alpha} = -1$

* $\alpha\bar{\alpha} = ?$

$\alpha\bar{\alpha} = (z + z^2 + z^4)(z^6 + z^5 + z^3)$

$= z^7 + z^6 + z^4 + z^7 + z^5 + z^{10} + z^9 + z^7$

$= 3 + z^8 + z^9 + z^{10} + z^4 + z^5 + z^6$

$= 3 + z \cdot z^7 + z^2 \cdot z^7 + z^3 \cdot z^7 + z^4 + z^5 + z^6$

$\alpha\bar{\alpha} = 2 + \underbrace{1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6}_{\alpha + \bar{\alpha}}$

$\alpha\bar{\alpha} = 2$ car $1 + z + z^2 + \dots + z^6 = \frac{1 - z^7}{1 - z} = 0$

2°) on a : $\alpha = z + z^2 + z^4$

$\alpha = e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}}$

$\alpha = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} + (\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7})i$

$R_e(\alpha) = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}$

D'autre part :

$R_e(\alpha) = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} \Rightarrow R_e(\alpha) = -\frac{1}{2}$

alors $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

on a donc :

$\alpha = -\frac{1}{2} + iy$, $y \in \mathbb{R}$

$y = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$

on a : $\alpha\bar{\alpha} = 2 \Rightarrow |\alpha|^2 = 2$

$\Rightarrow (-\frac{1}{2})^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = \frac{7}{4}$

Donc $\left(y = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ ou } y = -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

on a : $y = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}$

Car $\sin\frac{8\pi}{7} = \sin(\pi + \frac{\pi}{7}) = -\sin\frac{\pi}{7}$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

(Suite) :

on sait la fonction sinus est croissant sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$

x	0	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{2\pi}{7}$	$\frac{\pi}{2}$
	0	$\nearrow$		1

donc $\sin\frac{2\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{7}$

$\sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} > 0$

d'autre part $\sin\frac{4\pi}{7} > 0$ car $\frac{4\pi}{7} \in [0 ; \pi]$

Conclusion : $y > 0$

Alors $y = \frac{\sqrt{7}}{2}$

$$\boxed{\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}}$$

Exercice (14)

Soient ABC et AB'C' deux triangles isocèles en A. Soient a, b, c, c', b' les affixes respectives des points A, B, C, B', C'.

1°) Exprimer c et c' en fonction de a, b et b'.

2°) Montrer que $BB' = CC'$ et $(BB') \perp (CC')$.

Une Solution :

1°) -

$$\begin{cases} (AB, BC) = \frac{\pi}{2} \ [\pi] \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = i$$

$c - a = i(b-a) \Leftrightarrow$

$$\boxed{c = (1-i)a + ib} \quad (1)$$

$$\begin{cases} (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'}) = \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ AB' = AC' \end{cases}$$

$$\frac{c'-a}{b'-a} = i \Rightarrow c' - a = i(b-a)$$

$$\boxed{c' = (1-i)a + ib'} \quad (2)$$

2°) d'après (1) et (2) par soustraction

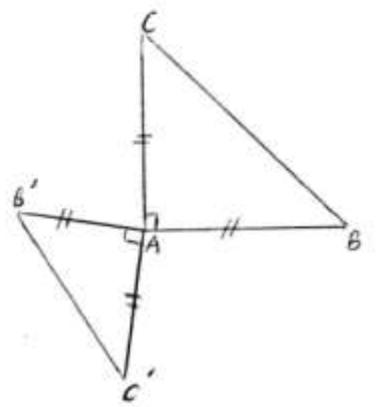
$c - c' = i(b - b')$

$$\frac{c-c'}{b-b'} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{cases} \arg\frac{c-c'}{b-b'} = \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ \left|\frac{c-c'}{b-b'}\right| = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (BB', CC') = \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ \frac{CC'}{BB'} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (BB') \perp (CC') \\ BB' = CC' \end{cases}$$



Exercice : (17)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f_a l'application qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = (a + \frac{1}{2}i)z + 4 - 4a - 2i, \ a \in \mathbb{C}$$

1°) Reconnaître l'application f_a et la caractériser pour chacune des valeurs suivantes du nombre complexe a :

a°) $a = 1 - \frac{1}{2}i$ b°) $a = 2 - \frac{1}{2}i$

c°) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d°) $a = \frac{1}{2}$

2°) Dans la suite de l'exercice on suppose que $a \in \mathbb{R}$ et on note $\theta = \arg(a + \frac{1}{2}i)$. Soit les points $M_0(3;0)$ et $\Omega(4;0)$. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on pose $M_{n+1} = f_a(M_n)$.

On note z_n l'affixe du point M_n.

a°) Calculer et écrire sous forme algébrique : z_1 et z_2 en fonction de a.

b°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$z_n = 4 - (a + \frac{1}{2}i)^n.$$

c°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$V_n = |z_n - 4|.$$

Pour quelles valeurs de θ ; la suite (V_n) est elle convergente ?

d°) Calculer en fonction de n : et $S_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$.

e°) Pour $a = \frac{1}{2}$; déterminer la nature du triangle $\Omega M_n M_{n+1}$. Placer les points M_0 ; M_1 et M_2.

Calculer S_n et $\lim_{n \to \infty} S_n$ puis interpréter géométriquement.

Une Solution :

$$f_a(z) = (a + \frac{1}{2}i)z + 4 - 4a - 2i$$

1°) a°) $a = 1 - \frac{1}{2}i$

$f_a(z) = z + \cancel{4} - \cancel{4}(\cancel{1} - \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}i) - \cancel{2i} = z$

f_a c'est l'indivisible de plan

b°) $a = 2 - \frac{1}{2}i \Rightarrow f_a(z) = 2z + 4 - 4(2 - \frac{1}{2}i) - 2i$

$= 2z - 4 = 2(z - 2)$

homothétie de centre $\Omega(4)$ et de rapport $k = 2$

c°) $a = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow f_a(z) = e^{i\frac{\pi}{6}}z - 4 - 2\sqrt{3} - 2i$

$= e^{i\frac{\pi}{6}}z + 4 - 2\sqrt{3} - 2i$

est une rotation de centre (4) et d'angle $\frac{\pi}{6}$

d°) $a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f_a(z) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 4 - 2 - 2i$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2 - 2i$

similitude directe de centre (4) et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

2°) a°) $a \in \mathbb{R}$, $\theta = \arg(a + \frac{1}{2})$

$M_0(3;0)$, $\Omega(4;0)$

$n \in \mathbb{N}$ $M_{n+1} = f_a(M_n)$

$z_1 = f_a(z_0) = 3(a + \frac{1}{2}i) + 4 - 4a - 2i$

(Suite) :

$z_1 = -a - \frac{1}{2} + 4 = 4 - a - \frac{1}{2}i$

$z_2 = (a + \frac{1}{2}i)(4 - a - \frac{1}{2}i) + 4 - 4a - 2i$

$z_2 = 4a - a^2 - \frac{1}{2}ia + 2i - \frac{1}{2}ia + 4 - 4a - 2i$

$\boxed{z_2 = \frac{17}{4} - a^2 - ia}$

b°) Montrons par racurance que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $z_A = 4 - (a + \frac{1}{2}i)^n$

* pour $n = 0$ on a ; $z_0 = z_A$

et $4 - (a + \frac{1}{2}i)^0 = 4 - 1 = 3$

C'est donc Vrai pour $n = 0$

* on suppose que c'est vrai pour un entier naturel p. c'est-a-dire que

$z_p = 4 - (a + \frac{1}{2}i)^p$

Montrons pour $p+1$

Comme $M_{p+1} = f_a(M_p)$

on a donc $z_{p+1} = (a + \frac{1}{2}i)z_p + 4 - 4a - 2i$

or: d'apres l'ypothese de recerence

on a : $z_p = 4 - (a + \frac{1}{2}i)^p$

d'où: $z_{p+1} = (a + \frac{1}{2}i)[4 - (a + \frac{1}{2}i)^p] + 4 - 4a - 2i$

donc $z_{p+1} = 4(a + \frac{1}{2}i) - (a + \frac{1}{2}i)(a + \frac{1}{2}i)^p + 4 - 4a - 2i$

$\Rightarrow z_{p+1} = 4a + 2i - (a + \frac{1}{2}i)^{p+1} + 4 - 4a - 2i$

$\Rightarrow \boxed{z_{p+1} = 4 - (a + \frac{1}{2}i)^{p+1}}$

D'où c'est due vrai pour $p+1$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{z_n = 4 - (a + \frac{1}{2}i)^n}$

c°) $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = |z_n - 4| = |4 - (a + \frac{1}{2}i)^n - 4|$

$= |-(a + \frac{1}{2}i)^n| = |(a + \frac{1}{2}i)^n| = |a + \frac{1}{2}i|^n$

$= (\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}})^n = (\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}})^{n+1}$

donc $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{(\sqrt{a^2+\frac{1}{4}})^{n+1}}{(\sqrt{a^2+\frac{1}{4}})^n} = (\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}})^{n+1-n} =$

$= \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}$

d'où : (V_n) est une suite géometrique de raison $q = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}$ et de première terme $V_0 = 1$

or: Une S.G de raison q converge vers 0 ssi $-1 < q < 1$, et vers son premiere terme de $q = 1$. d'où : (V_n) converge ssi $-1 < q \leq 1$

c'est-a-dire que $-1 < \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} \leq 1$, d'où

$-1 < \frac{1}{2} \leq \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}$, d'où on doit avoir

$\frac{1}{2} \leq \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} \leq 1$ c'est-a-dire que

$\frac{1}{4} \leq a^2 + \frac{1}{4} \leq 1$ c'est-a-dire que

$a \leq a^2 \leq \frac{3}{4}$, c'est-a-dire que

$\boxed{|a| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}}$

d°) $S_n = \sum_{k=0}^{n} d_k = \sum_{k=0}^{n} M_k M_{k+1} = \sum_{k=0}^{n} |z_{k+1} - z_k|$

$= \sum_{k=0}^{n} |(4 - (a + \frac{1}{2}i)^{k+1}) - (4 - (a + \frac{1}{2}i)^k)|$

$= \sum_{k=0}^{n} |4 - (a + \frac{1}{2}i)^{k+1} - 4(a + \frac{1}{2}i)^k|$

$= \sum_{k=0}^{n} |(a + \frac{1}{2}i)^k - (a + \frac{1}{2}i)^{k+1}|$

$= \sum_{k=0}^{n} |(a + \frac{1}{2}i)^k - (a + \frac{1}{2}i)|$

$= \sum_{k=0}^{n} |a + \frac{1}{2}i|^k \times |1 - a - \frac{1}{2}i|$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} (\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}})^k \times \sqrt{(1-a)^2 + \frac{1}{4}}$

(Suite) :

S_n est donc la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $q=\sqrt{a^2+\frac14}$ et de première terme $U_0=\sqrt{(1-a)^2+\frac14}$

* si $q=1$ alors:

$S_n = U_0 + U_0 + \dots + U_0$ $(n+1)$ fois

$$\boxed{S_n=(n+1)\sqrt{(1-a)^2+\frac14}}$$

* si $q\neq 1$ alors:

$\Longleftrightarrow S_n = \frac{U_0(1-q^{n+1})}{1-q}$

$$\boxed{S_n=\frac{(\sqrt{(1-a)^2+\frac14})(1-(\sqrt{a^2+\frac14})^{n+1})}{1+\sqrt{a^2+\frac14}}}$$

2°) Pour déterminer la nature du triangle ΩM_nM_{n+1} on peut calculer les longueurs de ses côtés.

* $\Omega M_n = |z_n-4| = V_n = (\sqrt{a^2+\frac14})^n = (\sqrt{(\frac12)^2+\frac14})^n =$
$= (\sqrt{\frac14+\frac14})^n = (\frac{1}{\sqrt2})^n$

* $\Omega M_{n+1} = d_n = (\sqrt{a^2+\frac14})^n \times \sqrt{(1-a)^2+\frac14} =$
$= (\sqrt{(\frac12)^2+\frac14})^n \times \sqrt{(1-\frac12)^2+\frac14} = (\frac{1}{\sqrt2})^n \times \frac{1}{\sqrt2} = (\frac{1}{\sqrt2})$

donc $M_nM_{n+1} = \Omega M_{n+1}$

D'où le ΩM_nM_{n+1} est isocèle en M_{n+1}

d'autre parte:

$M_nM_{n+1}^2 + \Omega M_{n+1}^2 = ((\frac{1}{\sqrt2})^{n+1})^2 + ((\frac{1}{\sqrt2})^{n+1})^2$
$= ((\frac{1}{\sqrt2})^2)^{n+1} + ((\frac{1}{\sqrt2})^2)^{n+1} = (\frac12)^{n+1} + (\frac12)^{n+1}$
$2\times(\frac12)^{n+1} = 2\times\frac12\times(\frac12)^n = (\frac12)^n$ et ΩM_n^2

$\Omega M_n^2 = ((\frac{1}{\sqrt2})^n)^2 = ((\frac12)^2)^n = (\frac12)^n$

donc $M_nM_{n+1}^2 + \Omega M_{n+1}^2 = \Omega M_n^2$

d'où : ΩM_nM_{n+1} est rectangle en M_{n+1}

- Conclusion :

ΩM_nM_{n+1} est rectangle et isocèle en M_{n+1}

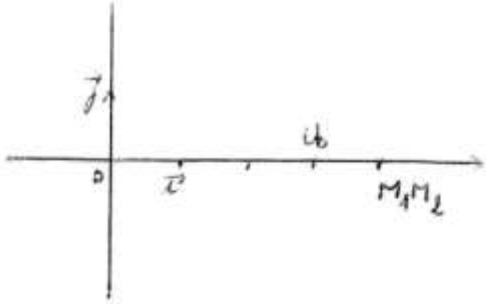
* $M_0\,(3;0)$

$z_1 = 4-a-\frac12 i = 4-\frac12-\frac12 i \Rightarrow z_1 = \frac72-\frac12 i$

$M_1(\frac72, -\frac12)$

$M_2 = \frac{17}{4} - a^2 - ia = \frac{17}{4}-\frac14-\frac12 i = 4-\frac12$

$M_2(4, -\frac12)$



* $S_n = \frac{\sqrt{(1-a)^2+\frac14}\,(1-(\sqrt{a^2+\frac14})}{1-\sqrt{a^2+\frac14}}$
$= \frac{(\sqrt{(1-\frac12)^2+\frac14}\,(1-(\sqrt{(\frac12)^2+\frac14})^{n+1}}{1-\sqrt{(\frac12)^2+\frac14}}$

$$\boxed{S_n = \frac{\frac{1}{\sqrt2}(1-(\frac{1}{\sqrt2})^{n+1})}{1-\frac{1}{\sqrt2}}}$$

on a : $-1 < \frac{1}{\sqrt2} < 1$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{\sqrt2})^{n+1} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt2}\times(1-0)$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{\frac{1}{\sqrt2}\times(1-0)}{1-\frac{1}{\sqrt2}}$

$= \frac{\frac{1}{\sqrt2}}{\frac{\sqrt2-1}{\sqrt2}} = \frac{1}{\sqrt2-1} = \frac{1}{\sqrt2-1}\times\frac{\sqrt2+1}{\sqrt2+1} = \frac{\sqrt2+1}{2-1} = \frac{\sqrt2+1}{1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} = \sqrt2+1$

intepretation geometrique S_n est la longueur de la ligne brisse M_0M_1, M_nM_{n+1}

Chapitre V : Généralités sur les fonctions

Exercice (01)

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x)=\frac{x+x^2+\dots+x^{2015}-2015}{x-1}$

Calculer $\lim_{x\to1}\frac{x^k-1}{x-1}$, $(k\in\mathbb{N}^*)$ en déduire $\lim_{x\to1}f(x)$.

Une Solution :

* $\lim_{x\to1}\frac{x^k-1}{x-1}=F.I$

on pose $g(x)=x^k$

Alors : $g(1)=1$

de $\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=k\cdot x^{k-1}$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^k-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$$

$$=k\times 1^{k-1}=k\times1=k$$

donc $\lim_{x\to1}\frac{x^k-1}{x-1}=k$

* $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x+x^2+\dots+x^{2015}-2015}{x-1}=F.I$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+x^2+\dots+x^{2015}-(\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{2015\text{ fois}})}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+\dots+(x^{2015}-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{(x-1)}{x-1}+\frac{x^2-1}{x-1}+\dots+\frac{x^{2015}-1}{x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\sum_{k=1}^{2015}\lim_{x\to1}\frac{x^k-1}{x-1}=\sum_{k=1}^{2015}\lim_{x\to1}\frac{x^k-1}{x-1}=\sum_{k=1}^{2015}k=1+2+\dots$$

$$\dots 2015$$

Somme des 2015 pour couris termes d'une S.A de raison 1 et de première terme 1,

Donc $\sum_{k=1}^{2015}k=\frac{2015}{2}=(1+2015)$

$$=\frac{2015\times2016}{2}=2015\times1008=2031120$$

donc :

$$\lim_{x\to1}f(x)=2031120$$

Exercice (02)

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x)=\frac{(1+x)^{2015}-1}{x}$

- Démontrer que f admet un prolongement par continuité g au point $x_0=0$.

Préciser $g(x)$.

Une Solution :

$$f(x)=\frac{(1+x)^{2015}-1}{x}$$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{2015}-1}{x}=F.I$$

on pose $g(x)=(1+x)^{2015}$

Alors $g(0)=1$

et $\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=2015(1+x)^{2014}$

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{2015}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

$$=g'(0)=2015\times1^{2014}=2015\times1=2015$$

donc :

$$\lim_{x\to0}f(x)=2015$$

d'où f admet un prolongement g par continuité au point $x_0=0$, défini par

$$\begin{cases}g(x)=f(x) & \text{si } x\neq0\\ g(0)=2015\end{cases}$$

Exercice : (04)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ telle que : $f(a) < ab$ et $f(b) > b^2$.

Démontrer qu'il existe un réel c de $[a,b]$ tel que $f(c) = bc$.

(On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $x \mapsto f(x) - bx$).

Une Solution :

on pose $g(x) = f(x) - bx$

* g est continue sur $[a,b]$ car somme de fonction continues sur $[a,b]$: $(x \mapsto f(x))$ donnée ; $(x \mapsto -bx)$, polynôme.
* $g(a) = f(a) - ba < 0$

car $f(a) < ab$

* $g(b) = f(b) - b^2 > 0$

car $f(b) > b^2$

donc $g(a) \cdot g(b) \leq 0$

d'apres les T.V.i :

l'equation : $g(x) = 0$ admet au moins une solution $c \in [a,b]$

c-a-dire ; qu'il existe une réel $c \in [a,b]$ tel que : $g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - bc = 0$
$\Rightarrow f(c) = bc$

Exercice : (07)

Soit f et g les fonctions definies par :

$f(x) = x^2 - 2x + a$, $g(x) = -x^2$

Déterminer le réel a pour que les courbes représentatives de f et de g, dans le même repère orthonormé, aient une tangente commune en un point.

Une Solution :

f et g admet une tangente commune

ssi $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g'(x) = f'(x) \end{cases}$

au points a on a :

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x + a = -x^2$ (1)

$f'(x) = g'(x) \Rightarrow 2x - 2 = -2x$ (2)

de (2) on a :

$4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

on remplace dans (1) et on a :

$(\frac{1}{x})^2 - 1 + a = -(\frac{1}{2})^2$

$\frac{1}{4} - 1 + a = -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4} + a = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow \left\{ a = \frac{1}{2} \right\}$ par verifait

$T : y = -x + \frac{1}{4}$

$T : y = f'(a)(x - a) + g(x)$

$T : y' = -x + \frac{1}{4}$ donc

$y' = y = -x + \frac{1}{4}$